Exercice 1

① f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et

$\forall x \in [0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{5}{x+3} - 1$

$= \dfrac{5-(x+3)}{x+3} = \dfrac{-x+2}{x+3}$

② $f(x) = 5\ln(x+3) - x$

$= 5\ln\left(x\left(1+\frac{3}{x}\right)\right) - x$

$= 5\left(\ln(x) + \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right) - x$

$= 5\ln(x) - x + 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$

$= x\left(5\dfrac{\ln(x)}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{3}{x} = 1$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.}$

③

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$5\ln(3) > 0$	$\nearrow$	$5\ln(5)-2$	$\searrow$	$-\infty$

④ La fonction f est continue sur $[0;+\infty[$ car

$x \mapsto \ln(x+3)$ est continue sur $[0;+\infty[$ en tant que composée de fonctions continues

$x \mapsto -x$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0;+\infty[$.

- f est strictement croissante sur $[0;2]$
- $f([0;2]) = [5\ln(3) ; 5\ln(5)-2]$

et $0 \notin f([0;2])$ donc

L'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution dans cet intervalle.

- f est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$
- $f([2;+\infty[) =]-\infty ; 5\ln(5)-2]$

et $0 \in f([2;+\infty[)$

Donc, thm de la bijection.

$\exists!\, x \in [0;+\infty[,\ f(x) = 0$.

Exercice 2

1) On résout $CX = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x - 2y + 0 = 0 \\ x \quad = 0 \\ y \quad = 0 \end{cases}$$

On a une infinité de solutions. Le système n'est pas de Cramer.

La matrice C n'est pas inversible.

2) (a) $M^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & -17 & 4 \\ 2 & -16 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $MX = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = M^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & -17 & 4 \\ 2 & -16 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 \\ -14 \\ -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution du système est $S = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$.

3) (E_λ) : $\begin{cases} -2x - 2y + z = \lambda x \\ -2x + y - 2z = \lambda y \\ x - 2y - 2z = \lambda z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - \lambda x - 2y + z = 0 \\ -2x + (-\lambda+1)y - 2z = 0 \\ x - 2y - (2 \cancel{+} \lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - (2+\lambda)z = 0 \\ -2x + (1-\lambda)y - 2z = 0 \\ -(2+\lambda)x - 2y + z = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y - (2+\lambda)z = 0 \\ 0 + (1-\lambda-4)y - 2(2+\lambda)z - 2z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ 0 \quad -2y - 2(2+\lambda)y + z - (2+\lambda)^2 z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + (2+\lambda)L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y - (2+\lambda)z = 0 \\ -(3+\lambda)y - (6+2\lambda)z = 0 \\ -(6+2\lambda)y + (-1-\lambda)(3+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y - (2+\lambda)z = 0 \\ (3+\lambda)y + (6+2\lambda)z = 0 & L_2 \leftarrow -L_2 \\ 2(3+\lambda)y + (1+\lambda)(3+\lambda)z = 0 & L_3 \leftarrow -L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y - (2+\lambda)z = 0 \\ (3+\lambda)y + 2(3+\lambda)z = 0 \\ 0 + \big((1+\lambda)(3+\lambda) - 4(3+\lambda)\big)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y - (2+\lambda)z = 0 \\ (3+\lambda)y + 2(3+\lambda)z = 0 \\ (-3+\lambda)(3+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Pour $\lambda \neq 3$ et $\lambda \neq -3$, le système est de Cramer et l'unique solution de (E_λ) est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Cas où $\lambda = 3$

$$(E_3) \iff \begin{cases} x - 2y - 5z = 0 \\ 6y + 12z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $S = \{(z, -2z, z)$, avec $z \in \mathbb{R}\}$.

Cas où $\lambda = -3$

$$(E_{-3}) \iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \{ x = 2y - z$$

L'ensemble des solutions est $S = \{(2y - z, y, z)$ avec $y, z \in \mathbb{R}\}$.

①

(a) f est une fonction dérivable sur $[0;1]$ (polynôme).

$\forall x \in [0;1]$ $\quad f'(x) = 2px > 0$

x	0		1
Variations de f.	$1-p$	$\nearrow$	1

On a donc $f([0;1]) = [1-p\,;1]$.

(b) On pose $P_n : \{u_n \in [0;1]\}$.

Initialisation : $u_0 = 0$ donc $u_0 \in [0;1]$ P_0 est vraie.

Hérédité : On suppose que P_n vraie pour un certain rang $n \geq 0$.

$$u_n \in [0;1] \Rightarrow f(u_n) \in [1-p, 1] \subset [0;1]$$
$$\Rightarrow u_{n+1} \in [0;1]$$

P_{n+1} est vraie donc (P_n) est héréditaire.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.

(c) On pose $R_n \{u_{n+1} \geq u_n\}$

Initialisation : $u_1 = 1-p$ et $u_0 = 0$ donc $u_1 \geq u_0$

R_0 est vraie.

Hérédité : On suppose R_n vraie pour un certain rang $n \geq 0$.

$$u_{n+1} \geq u_n \Rightarrow f(u_{n+1}) \geq f(u_n) \quad \text{(car } f \text{ est croissante)}$$
$$\Rightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

R_{n+1} est vraie, (R_n) est héréditaire.

Conclusion La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(d) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Elle est donc convergente.

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$

Donc ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

$$f(p) = \ell \iff p\ell^2 + 1 - p = \ell$$
$$\iff p\ell^2 - \ell + (1-p) = 0$$

Polynôme de degré 2 en ℓ, $\Delta = 1 - 4p(1-p)$
$$= 1 - 4p + 4p^2$$
$$= (1-2p)^2 > 0$$

Les solutions possibles sont
$$\ell_1 = \frac{1 - |1-2p|}{2p} \qquad \ell_2 = \frac{1 + |1-2p|}{2p}$$

Si $p \leq \frac{1}{2}$ alors $1 - 2p \geqslant 0$ et $\ell_1 = \frac{1 - 1 + 2p}{2p} = 1$, $\ell_2 = \frac{2 - 2p}{2p} = \frac{1}{p} - 1$

Pour ℓ_2, $p \leq \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \frac{1}{p} \geqslant 2$
$\Rightarrow \frac{1}{p} - 1 \geqslant 1$
$\Rightarrow \ell_2 \geqslant 1$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$ donc sa limite ne peut être plus grande que 1

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell_1 = 1$.

(8) Si $p > \frac{1}{2}$
$$\ell_1 = \frac{1 - (2p-1)}{2p} = \frac{1}{p} - 1 \qquad \ell_2 = \frac{2p}{2p} = 1.$$

Cette fois-ci $\frac{1}{p} - 1 < 1$

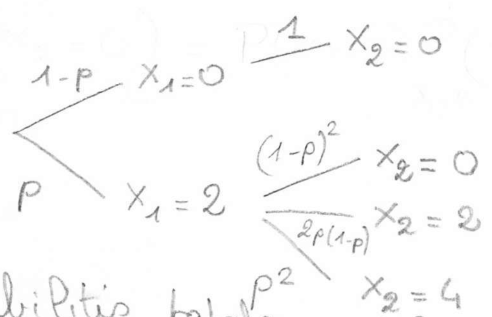
On montre par récurrence que $u_n \in \left[0 ; \frac{1}{p} - 1\right]$

Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell_1 = \frac{1}{p} - 1$.

(a) $X_1(\Omega)=\{0;2\}$.

k	0	2
$P(X_1=k)$	$1-p$	p

$X_2(\Omega)=\{0;2;4\}$



D'après la formule des probabilités totales, utilisant le SCE $(X_1=0, X_1=2)$

$$P(X_2=0)=P(X_1=0)\times P_{(X_1=0)}(X_2=0)+P(X_1=2)\,P_{X_1=2}(X_2=0)$$
$$=(1-p)\times 1+p(1-p)^2$$
$$=(1-p)(1+p(1-p))$$

$$P(X_2=2)=2p^2(1-p)$$

$$P(X_2=4)=p^3$$

On a $P(X_2=0)+P(X_2=2)+P(X_2=4)=(1-p)+p(1-p)^2+2p^2(1-p)+p^3$
$$=(1-p)+p\left((1-p)^2+2p(1-p)+p^2\right)$$
$$=(1-p)+p(1-p+p)^2$$
$$=1-p+p$$
$$=1$$

(b) Evident car c'est le SCE associé à la VA X_1 (cf cours).

(c) On sait que Puyehue a eu 2 descendants (Appelons les Putre et Calama)

Chercher l'événement "La descendance de Puyehue est éteinte à la $n+1$ ème génération" revient à chercher

"La descendance de Putre est éteinte à la $n^{\text{ème}}$ génération" et "la descendance de Calama est éteinte à la $n^{\text{ème}}$ générat°"

2 événements étant indépendants et étant les mêmes que $X_n=0$.

$$P_{(X_1=2)}(X_{n+1}=0)=\left(P(X_n=0)\right)^2$$

(d) On utilise la FPT sur $(X_1 = 0\ ,\ X_1 = 2)$

$$P(X_{n+1} = 0) = P_{(X_1=0)}(X_{n+1}=0) \times P(X_1=0) + P(X_1=2)\, P_{(X_1=2)}(X_{n+1}=0)$$

$$= (1-p) \times 1 + p \times \left(P(X_n=0)\right)^2$$

(e) On pose $u_n = P(X_n = 0)$

On remarque que $\begin{cases} u_0 = P(X_0=0) = 0 \\ u_{n+1} = 1-p + p u_n^2 = f(u_n) \end{cases}$

Donc (u_n) est la suite étudiée à la partie 1

- Si $p \leq \frac{1}{2}$ (c'est à dire si la probabilité de reproduct° des condors est faible)

Alors: $\lim_{n \to +\infty} p(X_n = 0) = 1$ | La lignée de Puyehue finira par s'éteindre (avec une probabilité de 1)

- Sinon

$\lim_{n \to +\infty} p(X_n = 0) = \frac{1}{p} - 1$